$\cos(X)$ est continue sur $]0,+\infty[$

$\Rightarrow \cos(\sqrt{x^2-1})$ est continue sur I.

$x \mapsto \frac{x}{U(x)}$ est continue sur I. $\Rightarrow f$ est continue sur I

(Produit de deux fonctions continues).

$\Rightarrow f$ Admet une primitive F sur I et f à la forme $x \mapsto U'(x) \times \cos[U(x)]$

$F(x) = \sin(\sqrt{x^2-1}) + k, k \in \mathbb{R}$.

11) $f(x) = \cos x \sin^3 x$. continue sur $\mathbb{R}$

(Produit de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$).

$f(x) = (\sin x)'(\sin x)^3$.

$F(x) = \frac{1}{4}\sin^4 x + k, k \in \mathbb{R}$.

12) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} = \frac{\frac{1}{3}(1+x^3)'}{\sqrt{1+x^3}}$

On a $x^3+1 = (x+1)(\underbrace{x^2-x+1}_{>0 \ car \ \Delta<0})$

$x^3+1 \succ 0$ *pour* $x+1 \succ 0 \Rightarrow x \succ -1$

Remarque : primitive de $\frac{U'}{\sqrt{U}}$ est $2\sqrt{U}+c$.

$\Rightarrow f$ Admet une primitive F sur $]-1,+\infty[$ et

$F(x) = \frac{1}{3} * 2\sqrt{1+x^3} + k, k \in \mathbb{R}$.

$F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{1+x^3} + k, k \in \mathbb{R}$.

Exercice2

$f(x) = 4x^3$.

$$x \mapsto \begin{cases} F(x) = x^4 + 2 \rightarrow si(x \geq 0) \\ F(x) = x^4 - 2 \rightarrow si(x < 0) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} F(x) = -2 \neq F(0) \\ \lim\limits_{x \to 0^+} F(x) = 2 \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow F$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}$

F est discontinue en $0 \Rightarrow F$ est discontinue sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow F$ n'est pas une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice3

$f(x) = (\cos x) \times (2\sin x - 1)$.

f est continue sur $\mathbb{R}$ (produit de deux fonctions continues)

$\Rightarrow f$ admet au moins une primitives sur $\mathbb{R}$.

On a : $f(x) = (\sin x)'(2\sin x - 1)$

$$= \frac{1}{2}(2\sin x - 1)'(2\sin x - 1)$$

$F(x) = \frac{1}{4}(2\sin x - 1)^2 + k, k \in \mathbb{R}$

$F(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{4}(2\sin\frac{\pi}{2} - 1)^2 + k = \frac{1}{4} + k = 0$

$\Rightarrow k = -\frac{1}{4}$

Donc $\boxed{F(x) = \frac{1}{4}(2\sin x - 1)^2 - \frac{1}{4}, x \in \mathbb{R}}$

Exercice4

$f(x) = \cos^3 x - 3\cos x + 2, x \in \mathbb{R}$

1) on a : $\cos^3 x = \cos x(\cos^2 x)$

$= \cos x(1 - \sin^2 x)$

$= \cos x - \cos x \sin^2 x$

$\Rightarrow f(x) = \cos x - \cos x \sin^2 x - 3\cos x + 2$

$= -\cos x \sin^2 x - 2\cos x + 2$

2) $f(x) = -(\sin x)'\sin^2 x - 2(\sin x)' + 2$

$\Rightarrow F(x) = -\frac{1}{3}\sin^3 x - 2\sin x + 2x + k, k \in \mathbb{R}$.

$F(-\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{3}(-1)^3 - 2(-1) + 2(-\frac{\pi}{2}) + k = 0$

$= \frac{1}{3} + 2 - \pi + k$

$= \frac{7}{3} - \pi + k = 0 \Rightarrow k = \pi - \frac{7}{3}$

$\Rightarrow F(x) = -\frac{1}{3}\sin^3 x - 2\sin x + 2x + \pi - \frac{7}{3}$